諸論問題解答
平成 24 年 1 月 17 日

問 1

相対精度 1% ということは,

$$\left|\frac{\sin\theta - \theta}{\sin\theta}\right| \leq 0.01$$

を意味する．$\sin\theta$ を 2 次まで展開して上式を解くと $\theta \leq 13.9^\circ$ であれば条件を満たすことが分かる．

表 1: $\sin\theta$ と θ の比較

θ/degree	$\sin\theta$	$\lvert\sin\theta - \theta\rvert$	相対精度%
5	0.0872	0.0001	0.1
10	0.1736	0.0009	0.5
13	0.2250	0.0019	0.8
14	0.2419	0.0024	1.0
15	0.2588	0.0030	1.2

問 2

東京-大阪間を 500km，人間の身長を 2m とする．前者の測定精度が

$$\frac{1\mathrm{m}}{500 \times 10^3\mathrm{m}} = 2 \times 10^{-6}$$

であるのに対し，後者は

$$\frac{1 \times 10^{-3}\mathrm{m}}{2\mathrm{m}} = 5 \times 10^{-4}$$

であるから，東京-大阪間を 1m の精度で測定した方がはるかに精度が良い．

問 3

球の体積 V は直径を D とすれば $V = \pi D^3/6$ で与えられる．よって V の不確かさ ΔV は,

$$\Delta V = \frac{\pi D^2 \Delta D}{2}$$

で計算できるから，ΔV は有効数字 1 桁で切り上げて $20\mathrm{cm}^3$ となる．

問 4

$$\Delta y = \frac{4}{(x-2)^2}\Delta x$$

問 5

$$\Delta y = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Delta\theta = \cot\theta\Delta\theta$$

問 6

面積 $S = A \times B$ より,

$$\Delta S = \sqrt{(B\Delta A)^2 + (A\Delta B)^2} = 2\mathrm{cm}$$

問 7

$\partial\epsilon/\partial a = -b/a^2$，$\partial\epsilon/\partial b = -1/a$ であるから,

$$\Delta\epsilon = \sqrt{\left(\frac{b\Delta a}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{a}\right)^2}$$

となる．この式に数値を代入すれば良いが，不確かさを 1 桁とすることにすれば，$a \approx b$，また $\Delta a = \Delta b$ であるから,

$$\Delta\epsilon = \frac{\sqrt{2}\Delta a}{a}$$

を計算すればよく，$\epsilon \pm \Delta\epsilon$=(3.5± 0.2)×$10^{-3}$ となる．

問 8

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{2a\Delta a}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{2b\Delta b}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta c}{c^2}\right)^2}$$

問 9

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{2\sqrt{(T_\mathrm{h}\Delta T_\mathrm{h})^2 + (T_\mathrm{v}\Delta T_\mathrm{v})^2}}{T_\mathrm{h}^2 - T_\mathrm{v}^2}$$

問 10

(1)2 桁，(2)3 桁，(3)4 桁，(4)4 桁，(5)5 桁

問 11

(a)6382km，(b)6.049×10^{24}kg，(c)622cm^2，(d)79cm^3
(e)39.4，(f)1.8×10^3，(g)1.5803$\mu\mathrm{m}^{-1}$

問 12

地球の一周の長さを L，表面積を S，体積を V とする．各々の不確かさ ΔL，ΔS および ΔV を求めれば L，S，V の有効数字が以下のようになることが分かる．

L=4.00×10^4km
S=5.10×$10^8\mathrm{km}^2$
V=1.08×$10^{24}\mathrm{km}^3$

問 13

横軸-縦軸と記す．

(1) $1/x - y$ グラフを描けば，直線の傾き $-b$，切片 a として求めることが出来る
(2) $x - y^2$ グラフを描く．直線の傾きが b，切片は a となる
(3) $x - \log y$ グラフを描く．直線の切片は A となり，傾きは自然対数の場合 $-k$，常用対数であれば $-k\log e$ となる．
(4) $x - \log y$ のグラフを描く．直線の切片は A，傾きは $\log k$ である

問 14

$\log y = k \log x + \log A$ であるから，$\log x - \log y$ グラフを描けば良い．与えられた数値について双方自然対数をとると次のようになる．

表 2: x と y の関係から自然対数を求める

x	y	$\log x$	$\log y$
0.774	0.241	-0.256	-1.42
1.45	0.615	-0.372	-0.486
2.00	1.00	0.693	0.000
3.05	1.88	1.12	0.631
10.4	11.9	2.34	2.48
19.1	29.5	2.95	3.38
38.4	84.0	3.65	4.43
60.2	165	4.10	5.11
79.1	249	4.37	5.52

表 2 の数値をグラフにプロットすると図 1 の直線になる．

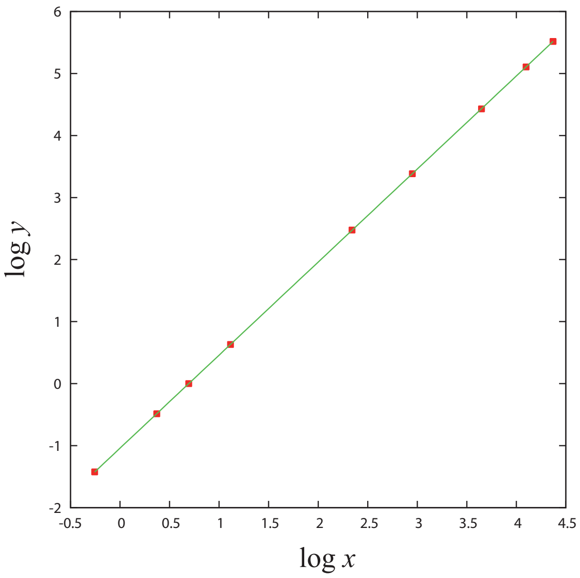

図 1: 両対数グラフの例

図 1 から直線の傾きと切片を最小 2 乗法で求めると，傾き=1.50，切片=-1.04 を得る．

問 15

減衰する振動は次式で与えられると考えてよいだろう．

$$y = Ae^{-\gamma t} \sin \omega t$$

そこで，与えられた数値を使い横軸に N，縦軸に $\log A$ を取ってグラフにプロットすると図 2 のようになる．

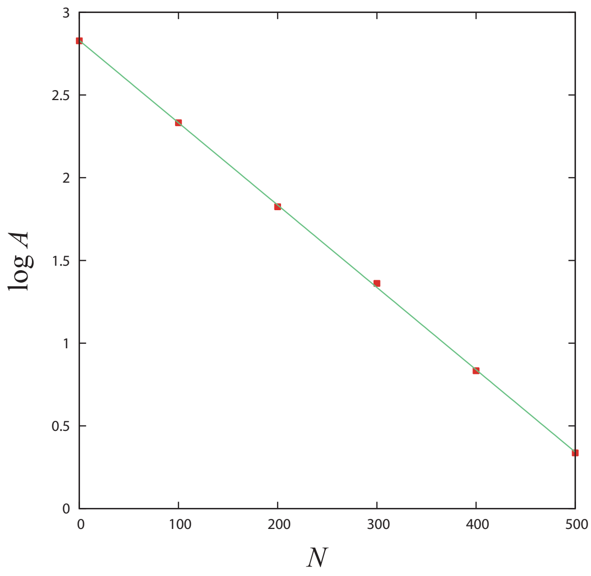

図 2: 横軸に N，縦軸に $\log A$ を取ったグラフ

最小二乗法で傾きと切片を求めると次式，

$$y = 16.9 e^{-4.98 \times 10^{-3} N}$$

を得る．この式から N に対する y の数値を求めて元のデータと比較すると次のようになる．

表 3: N，A と計算式から求めた数値の比較

N	A	$\log A$	y
0	16.9	2.82	16.9
100	10.3	2.33	10.3
200	6.3	1.82	6.24
300	3.9	1.36	3.79
400	2.3	0.833	2.31
500	1.4	0.336	1.40